Strategie per avviare studenti con disabilità alla matematica «avanzata»: equazioni e geometria analitica

M. ELISABETTA BACCARIN
Laureata in Scienze dell'Educazione, Università di Padova
NIVES BENEDETTI
Istituto Professionale Alberghiero di Vittorio Veneto
ELISABETTA MONARI MARTINEZ
Dipartimento di Matematica pura e applicata, Università di Padova

SOMMARIO

Nel caso degli studenti con disabilità, può capitare di compiere l'errore di sottovalutarne le potenzialità, con il risultato che questa profezia si autoavvera, perché vengono proposti loro solo contenuti molto semplici; per quanto riguarda la matematica, in particolare, è frequente che ci si limiti all'insegnamento delle quattro operazioni. Attraverso le strategie presentate in questo articolo, che riporta l'esperienza di integrazione scolastica di due studenti con sindrome di Down, questi hanno potuto imparare a risolvere equazioni e problemi, e ciò dimostra come, utilizzando adeguate tecniche didattiche, sia possibile aggirare alcuni ostacoli dei deficit e proporre argomenti e attività più vicini a quelle della classe.

L'esperienza dell'integrazione scolastica sta permettendo, anche a studenti con la sindrome di Down, l'apprendimento di argomenti di matematica «avanzata» (cioè che si studiano nelle scuole secondarie) e la loro applicazione a materie professionali.

La fiducia nelle loro abilità cognitive di ragionamento ci sta facendo scoprire come i ragazzi con sindrome di Down possano imparare a ragionare in termini matematici e ad applicare gli strumenti di questa materia ai diversi ambiti.

Il presente articolo è basato sull'esperienza delle tesi di Nives Benedetti (corso di Specializzazione per insegnanti di sostegno, Università di Venezia) e di Maria Elisabetta Baccarin (laurea quadriennale in Scienze dell'Educazione, Università di Padova) di cui Elisabetta Monari Martinez è stata relatrice. In entrambi i casi le esperienze delle tesi sono continuate portando a nuovi e significativi risultati, qui riportati.

Nel nostro paese, com'è noto, a partire dal 1977 c'è stata l'integrazione scolastica degli studenti con disabilità, anche intellettiva, nelle scuole elementari e medie.

Vol. 10, n. 2, dicembre 2004 (pp. 183-200) ISSN 1123-928X

Questo ha stimolato ad accrescere la sensibilità dell'opinione pubblica nei confronti della diversità, ha migliorato la preparazione specifica degli operatori scolastici e infine ha sollecitato la promozione di norme di garanzia e di tutela. La legge104 del 5 febbraio 1992, che richiama, riordina e amplia le norme precedenti «per l'assistenza, l'integrazione sociale e i diritti» della persona con disabilità, sottolinea il diritto degli alunni disabili a frequentare tutte le scuole, di ogni ordine e grado, dall'età di zero anni fino all'università e di fatto quindi apre ai ragazzi disabili anche le porte delle scuole secondarie superiori, dando loro l'accesso a tutte le materie e quindi alla «cultura».

Riguardo all'apprendimento della matematica, in situazione di integrazione scolastica, i dati più significativi sono quelli pubblicati nel 1999 da Gherardini e Nocera,[1] i quali riportano, per voce degli insegnanti, le conoscenze matematiche degli studenti con sindrome di Down che frequentano le scuole elementari, medie e superiori (l'indagine riferisce di 385 casi distribuiti in tutto il territorio nazionale).

Da tali dati si vede come, nel campione considerato, solo il 6% degli studenti con sindrome di Down nelle scuole elementari, il 4% nelle scuole medie e l'1% nelle superiori sanno risolvere semplici problemi individuando la giusta operazione e soltanto — rispettivamente — l'1%, il 2% e il 7% sanno operare con frazioni.

Più incoraggianti sono i dati sulle percentuali e sul piano cartesiano nelle scuole medie e superiori: rispettivamente l'8% e il 12% capiscono che cos'è una percentuale e il 10% e il 18% sanno individuare i punti nel piano cartesiano.

Già questo fa intravedere come l'affrontare argomenti più «avanzati» porti a risultati migliori, nonostante permangano ampie lacune nelle operazioni di base; nelle tre fasce scolastiche considerate, rispettivamente:

- il 36%, il 26% e il 10% non sanno eseguire l'addizione;
- il 40%, il 39% e il 25% non sanno eseguire la sottrazione;
- il 76%, il 73% e il 60% non sanno eseguire la moltiplicazione;
- l'80%, il 75% e il 69% non sanno eseguire la divisione.

Questo dà ancora più sostegno all'idea di sorpassare queste difficoltà attraverso l'uso di strategie visive e della calcolatrice, e di concentrare maggiormente gli sforzi (di insegnanti e studenti) su temi più lontani dal calcolo numerico e più vicini alla logica. Questo approccio, applicato con successo nel 1996 con due adolescenti che frequentavano le scuole superiori, ai quali sono state insegnate le frazioni, le potenze, le espressioni e i primi elementi di algebra,[2] è continuato con le sperimentazioni qui presentate e con altre tuttora in corso.

Questi risultati sarebbero comunque impensabili al di fuori di un contesto come l'integrazione scolastica, che è in grado di offrire un'importante motivazione sia agli studenti che agli insegnanti.

Sindrome di Down: aspetti cognitivi e apprendimento della matematica

Conoscere in modo sempre più approfondito i limiti e soprattutto le potenzialità delle persone con la sindrome di Down è fondamentale per progettare qualsiasi intervento educativo e didattico.

Qui di seguito tenteremo di spiegare brevemente alcune caratteristiche cognitive che spesso si riscontrano negli alunni con tale sindrome:

- difficoltà a livello di *memoria a breve termine e di lavoro;*[3]
- difficoltà a livello di *memoria a lungo termine esplicita;*[4]
- è relativamente ben preservata la *memoria implicita,* fatta eccezione per il linguaggio (quindi imparano bene facendo);[5]
- problemi di *comprensione del linguaggio,* non tanto delle singole parole quanto delle frasi;[6]
- limitata *produzione del linguaggio orale,* che è sicuramente inferiore alla loro comprensione; infatti, se consideriamo i gesti prodotti alla stessa stregua delle parole, nel linguaggio espressivo in generale non si rileva un ritardo particolarmente grave, ma solo in quello verbale;[7]
- *instabilità dell'apprendimento,* che porta a dimenticare le conoscenze già acquisite;[8]
- *ritardo nella maturazione,* per cui spesso nella seconda decade di vita si notano progressi notevoli in campo cognitivo in aree che usualmente si sviluppano nella prima;[9]
- problemi a *ricordare le sequenze* temporali, numeriche e di oggetti; tuttavia, una volta apprese, esse vengono ricordate nel giusto ordine;[10]
- problemi di *attenzione;*
- *deficit di autostima;*
- *deficit della funzione di controllo,* cioè difficoltà a iniziare e a interrompere un'azione volontaria, in particolari condizioni (per esempio su richiesta);[11]
- *resistenza ai cambiamenti,* in forma più o meno accentuata;
- problemi di *depressione.*

Queste ultime tre caratteristiche in genere si riscontrano solo nelle persone con sindrome di Down definite «gravi», ma possono manifestarsi, in maniera transitoria, anche nei casi più lievi nei periodi «critici» della vita. Una tempestiva modifica delle condizioni ambientali può alleviare questi problemi.

Dicevamo prima che non si può parlare di difficoltà se contemporaneamente non si hanno ben chiare anche le potenzialità degli studenti che abbiamo di fronte.

Le ricerche internazionali degli ultimi anni hanno dimostrato che le persone con sindrome di Down possono imparare molto di più di quanto immaginiamo.

È infatti fondamentale, in educazione, domandarsi se l'interlocutore a cui ci rivolgiamo non comprende un concetto perché ha capacità limitate o perché siamo noi che non lo abbiamo spiegato in modo appropriato per lui. In altre parole, la sfida passa dall'allievo al docente con questa domanda: possiamo mettere a punto metodi didattici così efficaci che ognuno, nonostante i propri limiti, possa apprendere ciò che gli interessa?

Gli insegnanti in generale non dovrebbero avere troppi pregiudizi riguardo a ciò che una persona con ritardo mentale può imparare: infatti queste persone, se motivate, mostrano grande forza e tenacia.

È purtroppo confermato che i ragazzi con la sindrome di Down hanno alcune difficoltà in matematica, soprattutto nella numerazione e nel fare i calcoli sia per iscritto che a mente. Molte volte la matematica è identificata con il «far di conto» e quindi con le quattro operazioni: di conseguenza, secondo questa logica, a questi alunni, i quali faticano non poco a svolgere operazioni solitamente considerate elementari, è precluso tutto l'apprendimento successivo in questa materia.

In pratica spesso accade che, proprio per questa ragione, molti insegnanti di sostegno, di fronte alle evidenti difficoltà di calcolo dei loro alunni, sono scoraggiati a spiegare nuovi argomenti, sia per paura di creare sconforto agli alunni di fronte a «probabili» insuccessi, sia perché ritengono più motivante e semplice per loro collegare la matematica con la vita quotidiana, insegnando quindi l'uso del denaro, dell'orologio e del calendario. La scelta di questi percorsi di autonomia sociale è ottima e comunque necessaria in ogni caso, ma non deve impedire a priori la sperimentazione di percorsi matematici più simili a quelli della classe. La nostra filosofia è infatti quella di considerare le difficoltà di calcolo come difficoltà localizzate che non influiscono sulla possibilità generale di apprendere nozioni molto più sofisticate, che coinvolgono più lo sviluppo logico che le abilità numeriche.[12]

Una ricerca di Danesi, Monari Martinez e Xausa[13] condotta con 20 ragazzi con sindrome di Down mostra come la logica non sia un'area debole: al contrario, rileva come alcune volte si ottengano risultati lievemente superiori a quelli del campione di riferimento (bambini normodotati di pari età mentale). Dall'altra parte, recenti studi riportati da Johnson-Laird,[14] effettuati con l'ausilio delle neuroimmagini, indicano come nel nostro cervello le aree dell'elaborazione numerica e l'area della logica siano distanti: le prime si trovano nella parte posteriore dei lobi parietali, mentre la seconda nella parte frontale destra. Questo potrebbe confermare l'ipotesi che le difficoltà nella numerazione e nei calcoli non implichino difficoltà nella logica e quindi forse anche nell'algebra.

In quest'ottica, negli ultimi anni, abbiamo cercato territori alternativi da esplorare puntando l'attenzione e la fiducia sulle capacità logiche e di ragionamento dei ragazzi con sindrome di Down e non più sulla sola abilità di calcolo che, riteniamo, possa facilmente essere integrata con l'uso della calcolatrice.[15]

Non più solo programmi alternativi

Dalla nostra raccolta di esperienze è emerso che la maggioranza degli studenti con sindrome di Down, che frequenta i diversi livelli di scuola, segue un programma di matematica che difficilmente si discosta da quello di 3ª elementare, con la conseguenza che per molti di essi la matematica è la materia meno motivante e più lontana dai programmi della classe.

In questo articolo si riporta l'esperienza positiva svolta con due ragazzi con sindrome di Down, i quali, fino a poco tempo fa, svolgevano solo semplici calcoli, mentre oggi sono in grado di seguire il programma della classe con solo alcuni adattamenti e supporti. Il risultato più importante è stato che essi non solo hanno appreso nuove nozioni matematiche, ma hanno anche imparato ad applicarle allo studio di altre discipline. Tale esercizio logico ha reso anche più facile e veloce l'apprendimento di nuovi argomenti di matematica.

In entrambe le esperienze si è iniziato con l'insegnare quelle conoscenze di base, come le frazioni e le percentuali, utili per affrontare il programma della classe e subito dopo sono state spiegate, servendosi anche della visualizzazione (si veda la figura 1), le equazioni di primo grado e la loro risoluzione. Questa scelta è nata dal desiderio di semplificare la soluzione dei problemi con uno strumento matematico molto potente (come sono le equazioni) e di rendere più agevole l'uso delle formule nelle diverse discipline, riducendo al minimo il loro numero e prevedendo l'uso di equazioni per ricavare i dati incogniti anziché usare le formule «inverse» come spesso accade. In questa maniera diminuisce la necessità di memorizzare formule, dato che molte di esse vengono ricondotte a poche fondamentali.

Con tale approccio, il problema viene tradotto in termini matematici attraverso una sola formula, che presenta un dato incognito, il quale viene poi calcolato utilizzando le operazioni matematiche consentite nella risoluzione delle equazioni. Infine, il dato incognito trovato viene reintrodotto nel contesto del problema. Ciò è in linea con il metodo scientifico usato in tutte le scienze applicate e consente un'economia di pensiero, in quanto permette di lavorare sui dati del problema isolandoli dal contesto e utilizzando semplici regole matematiche che sono le stesse per tutti i problemi. Questo metodo permette quindi ai docenti di proporre agli alunni disabili, durante le ore di matematica, non solo programmi alternativi ma anche, con semplici adattamenti, il programma pensato per l'intera classe. Di seguito presentiamo in dettaglio le nostre esperienze con questo metodo.

Esperienza con Edoardo

Riportiamo per prima l'esperienza con Edoardo, anche se è iniziata dopo quella con Francesca, per mostrare la prima parte del programma. Edoardo è un ragazzo di 14 anni con sindrome di Down (trisomia 21 libera e non a mosaico), che frequenta la seconda media inferiore.

Questa sperimentazione, oggetto della tesi di Baccarin,[16] ha dimostrato come, con questo metodo, lo studente abbia potuto seguire un programma di matematica molto più vicino a quello della sua classe.

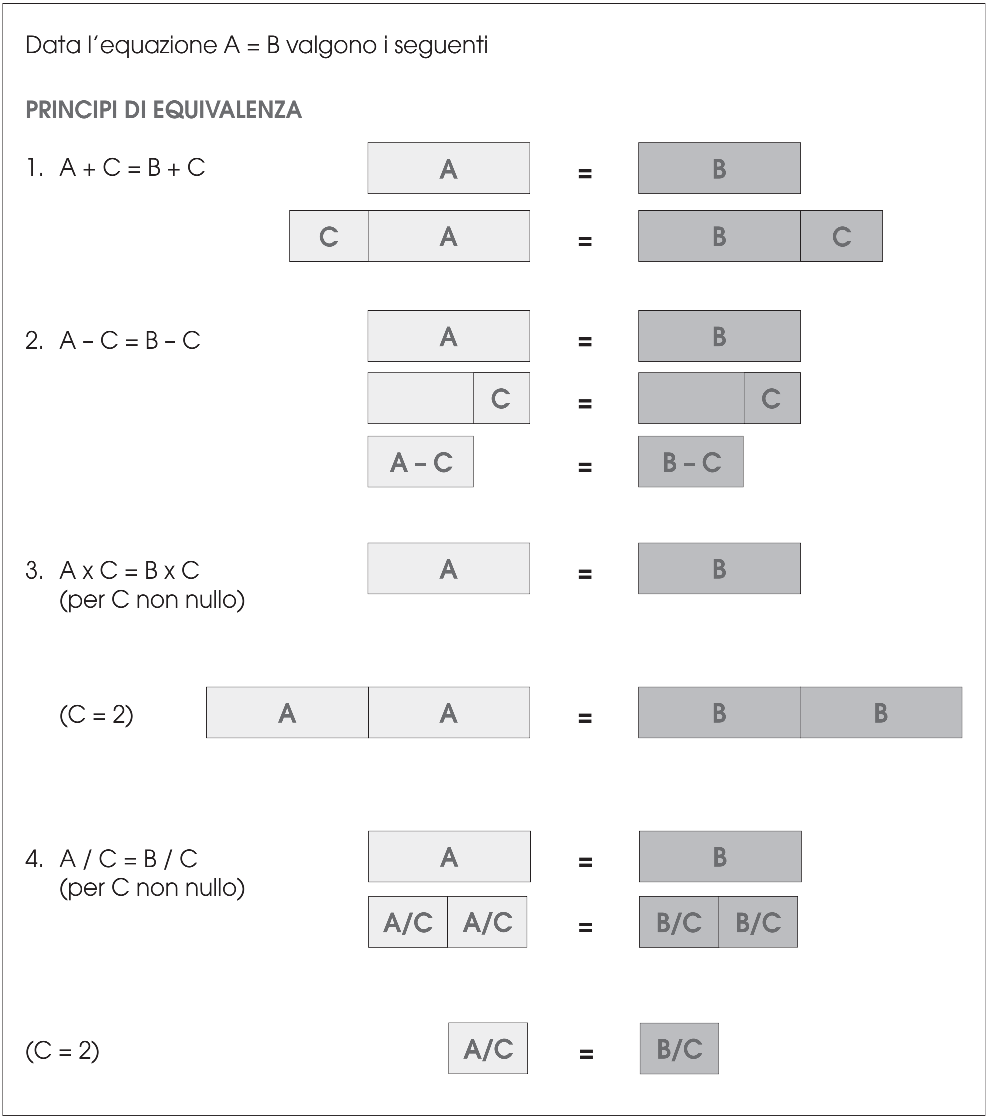


Fig. 1 Le regole delle equazioni spiegate in modo visivo.

La situazione di partenza presentava un alunno svogliato e per nulla amante della matematica, considerato abile solo nel risolvere semplici calcoli di addizione e di sottrazione.

L'obiettivo della sperimentazione è stato quello di far apprendere all'alunno argomenti del programma di classe, come i problemi con le frazioni, le percentuali, le radici quadrate, il calcolo delle aree e il teorema di Pitagora.

In un primo momento è stato necessario introdurre alcune nozioni chiave come i concetti di frazione e di percentuale, la semplificazione e le operazioni con le frazioni. Riguardo a queste ultime, prima si sono insegnate la moltiplicazione e la divisione e poi anche la somma, senza però introdurre il concetto di minimo comune denominatore: si è proposto di addizionare prima frazioni con lo stesso denominatore e poi con denominatori diversi, in questa maniera:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Quest'ultimo concetto è stato illustrato anche tramite la visualizzazione.

In un secondo momento è stato introdotto il concetto di equazione, con i suoi principi di equivalenza (si veda la figura 1) per poi passare alla risoluzione di problemi.

Si osservi che la classe, trattandosi di una seconda media, non aveva ancora svolto le equazioni, che sono state introdotte solo in questo programma individualizzato, al fine di semplificare, per Edoardo, la soluzione dei problemi. (Successivamente Corazza e Monari Martinez[17] hanno condotto una sperimentazione in una classe quarta elementare in cui si proponeva un programma analogo a studenti normodotati, e anche tale esperienza ha avuto importanti esiti positivi.)

La prima relazione su cui si è lavorato è stata:

$$\boxed{\text{frazione x tutto = parte}}$$

per risolvere poi, con essa, i relativi problemi.

Tutti questi argomenti hanno richiesto non più di due mesi per esser ben assimilati da Edoardo.

Vediamo ora con un esempio, presentato nella figura 2, come sia possibile risolvere un problema con le equazioni pur possedendo scarse abilità di calcolo.

Senza l'uso dell'equazione lo studente avrebbe scritto:

$$\text{numero alunni} = (6 : 25) \times 100$$

Problema

Un giorno in classe mancano 6 studenti, che corrispondono al 25% della classe. Quanti alunni ha l'intera classe?

Metodo utilizzato

Scrivo la relazione **$\boxed{\text{frazione x tutto = parte}}$**

Denoto con $\square$ l'incognita

$\frac{25}{100} \times \square = 6$ Moltiplico entrambi i membri per 100

$\overset{1}{\cancel{100}} \times \frac{25}{\underset{1}{\cancel{100}}} \times \square = 6 \times 100$ Divido entrambi i membri per 25

$\frac{\overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{25}}} \times \square = \frac{600}{25}$

$\square = 24$

Risposta: l'intera classe ha 24 alunni.

Verifica $\frac{25}{100} \times 24 = 6$

Fig. 2 Problema risolto mediante un'equazione da Edoardo, un ragazzo di 14 anni con sindrome di Down.

In entrambi i casi l'alunno con scarse abilità di calcolo utilizzerà la calcolatrice, ma mentre con il metodo tradizionale dovrà ricordare la formula a memoria scegliendola tra tante, con questo metodo sarà sufficiente ricordarne una soltanto che, una volta individuata l'incognita, permetterà di risolvere l'equazione. Solo nell'ultimo passaggio farà uso della calcolatrice, come del resto spesso tutti noi facciamo.

Questo metodo permette di utilizzare la stessa formula per tre diversi tipi di problemi che altrimenti avrebbero richiesto tre formule diverse.

Riportiamo nella figura 3 uno dei tanti problemi che Edoardo svolge oggi in maniera completamente autonoma.

PROBLEMA

$$\underbrace{(\text{Altezza x Altezza})}_{(\text{Altezza}^2)} \text{ x I.M.C.} = \text{Peso}$$

Ricorda che l'Indice di Massa Corporea (I.M.C.) è un indice che mette in rapporto il peso corporeo con l'altezza.

Ora calcola il tuo Indice di Massa Corporea e confronta il risultato con i dati della tabella qui sotto.

> 40	Sovrappeso di 3° grado	**Grave obeso**
30-40	Sovrappeso di 2° grado	**Obeso**
25-30	Sovrappeso di 1° grado	**Sovrappeso**
18,5-25	Normopeso	**Normale**
< 18,5	Sottopeso	**Magro**

h = 1,60 m P = 50 Kg

$$(1{,}60 \times 1{,}60) \times \boxed{} = 50$$

$$\frac{1\,\cancel{2{,}56}}{1\,\cancel{2{,}56}} \times \boxed{} = \frac{50}{2{,}56}$$

$$\boxed{} = 19{,}53125$$

il mio peso é normale

Fig. 3 Problema svolto autonomamente da Edoardo.

Esperienza con Francesca

Questo programma sperimentale è stato formulato, negli aspetti teorici, da Monari Martinez nel corso di «Psicopatologia del calcolo e della soluzione dei problemi» per il corso di specializzazione per insegnanti di sostegno organizzato dall'Università di Venezia nel 2000-2001.[18]

Nives Benedetti,[19] specializzanda in quel corso, ha raccolto tale proposta di sperimentazione, scegliendola come argomento per la propria tesi. Da qui è nata l'esperienza con Francesca, una ragazza di 18 anni con sindrome di Down (trisomia 21 libera e non a mosaico) che frequentava l'Istituto Professionale Alberghiero, nel quale Benedetti insegnava «Scienze degli alimenti». Fino a quel momento a Francesca erano stati proposti solo problemi con le quattro operazioni, mentre nel corso della sperimentazione è stata capace di svolgere il calcolo delle tabelle calorico-nutrizionali di vari piatti, nonché del peso forma e del fabbisogno energetico, mediante l'uso di formule e di equazioni di primo grado. Si è iniziato con lo studio delle frazioni e delle equazioni e poi, con il metodo già descritto nell'esperienza precedente, si è introdotta la formula FRAZIONE X TUTTO = PARTE e si sono presentati problemi che ne prevedevano l'uso e nei quali un dato figurava come incognita, indicata inizialmente con *?* e poi con x.

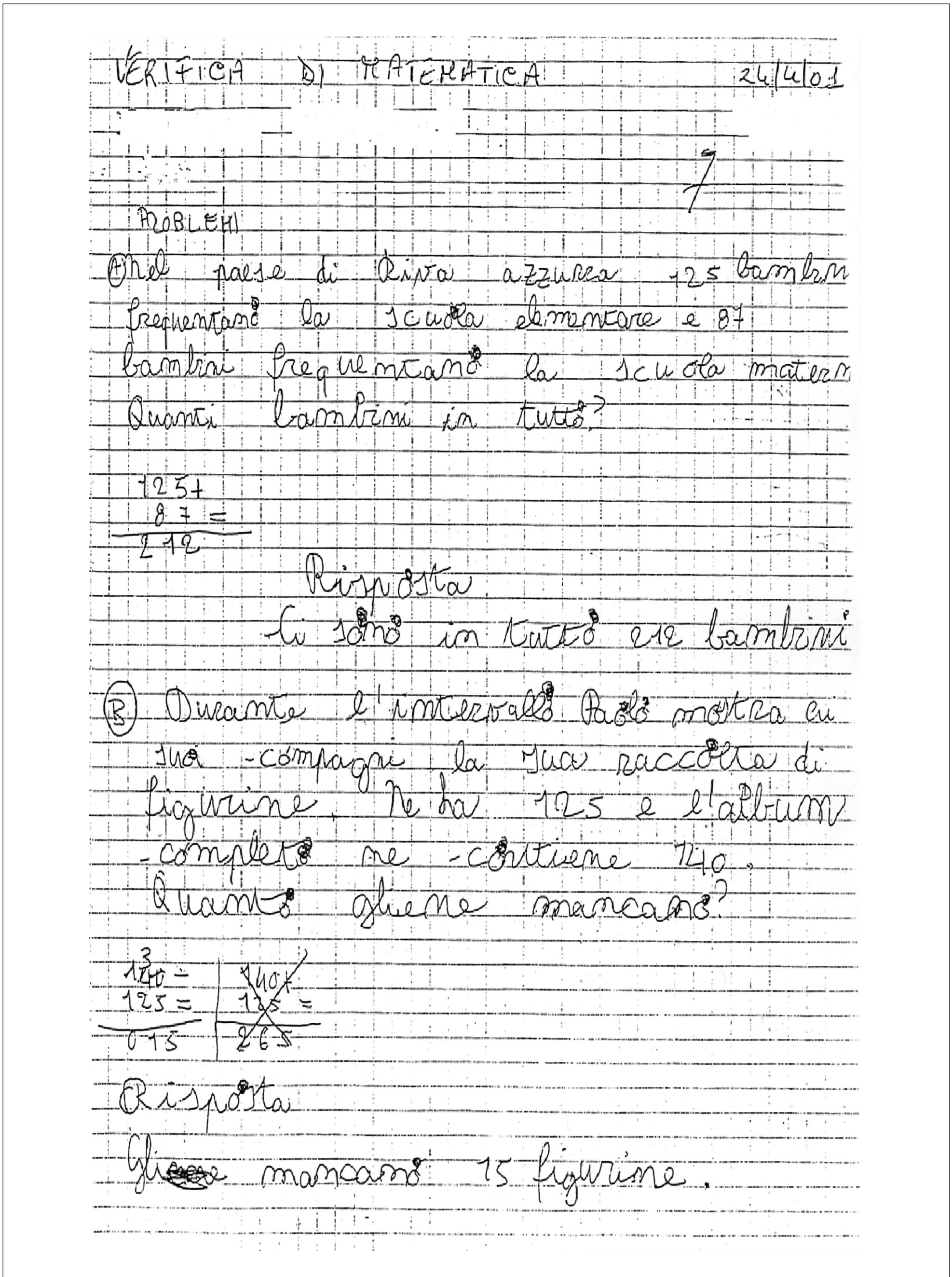
L'alunna ha capito perfettamente il significato dell'incognita, tanto da cercare spontaneamente, dopo aver eseguito i calcoli, la formula di partenza, per andarvi a sostituire il numero mancante, dimostrando così di comprendere anche il significato della verifica.

Questa esperienza è continuata anche dopo la tesi, l'anno successivo, quando Benedetti è diventata l'insegnante di sostegno di Francesca. Si è potuto così continuare il programma con lo studio di problemi di matematica finanziaria, previsti in quel corso, e con esercizi di geometria analitica, come lo scrivere l'equazione di una retta per due punti, trovare l'intersezione di due rette e calcolare il perimetro e l'area di un triangolo date le coordinate dei vertici, tutti argomenti che si avvalgono di formule e di equazioni. Si può quindi notare che l'apprendimento di queste ultime permette, una volta identificata la relazione tra i vari dati, la risoluzione di molteplici problemi aritmetici e geometrici.

Recentemente, seguendo il programma della classe, l'alunna ha imparato le funzioni esponenziali, i logaritmi e attualmente sta risolvendo le equazioni esponenziali come i suoi compagni. Il suo non è un apprendimento meccanico: al contrario, Francesca dà sempre più prova di comprendere le relazioni e i significati matematici degli enti che si trattano. Può quindi svolgere gli stessi esercizi dei compagni e ha acquisito una tale sicurezza che è in grado di sostenere le interrogazioni dell'insegnante di matematica di classe, che apprezza i suoi apprendimenti e può ora proporre anche a lei, come al resto della classe, argomenti nuovi.

Riportiamo alcuni esempi del lungo lavoro svolto con Francesca che mettono in luce alcuni aspetti salienti dal punto di vista didattico.

Il primo, presentato nella figura 4, è un esempio di una verifica in classe che Francesca svolgeva prima dell'introduzione di questa sperimentazione: si trattava di semplici problemi con somma e sottrazione, perché si riteneva che quello fosse il massimo che potesse fare; si noti come la ragazza mettesse in tutto il testo dei pallini neri che forse rappresentano una stereotipia. Dopo che ha iniziato la sperimentazione, i pallini sono completamente scomparsi.



VERIFICA DI MATEMATICA 24/4/01

7

PROBLEMI

A) nel paese di Riva azzurra 125 bambini frequentano la scuola elementare e 87 bambini frequentano la scuola materna Quanti bambini in tutto?

$$\begin{array}{r} 125+ \\ 87= \\ \hline 212 \end{array}$$

Risposta

Ci sono in tutto 212 bambini

B) Durante l'intervallo Paolo mostra ai suoi compagni la sua raccolta di figurine. Ne ha 125 e l'album completo ne contiene 140. Quanti gliene mancano?

$$\begin{array}{r} 140- \\ 125= \\ \hline 015 \end{array} \quad \cancel{\begin{array}{r} 140+ \\ 125= \\ \hline 265 \end{array}}$$

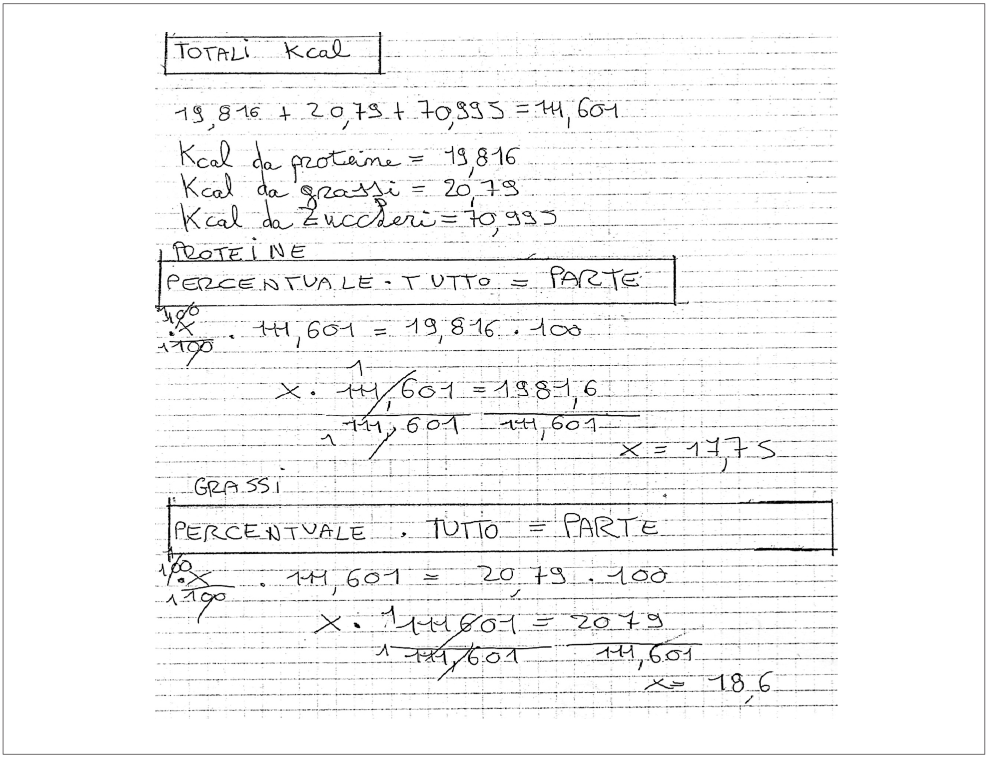
Risposta

Gli mancano 15 figurine.

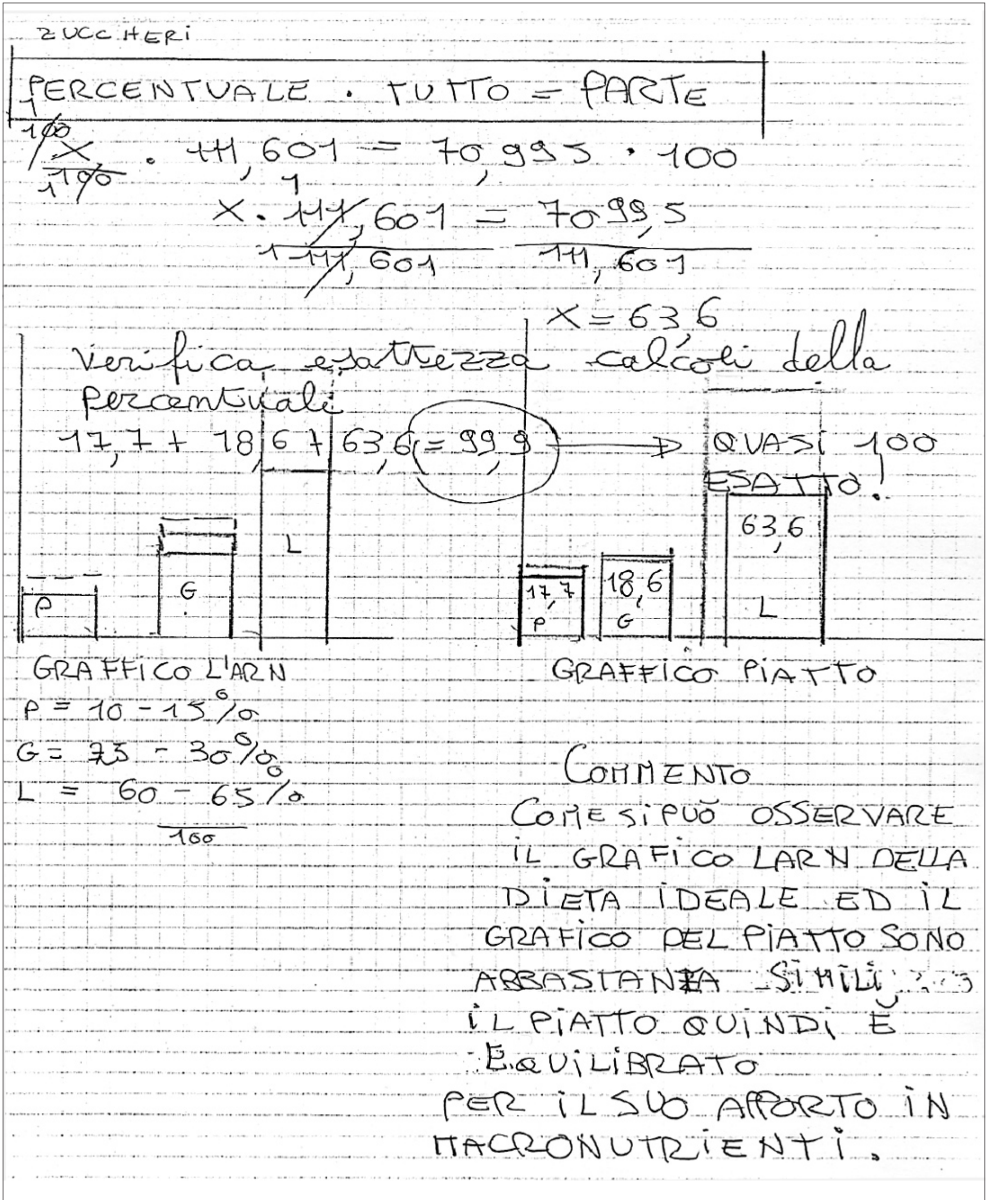
Fig. 4 Tipico problema svolto da Francesca, una ragazza di 18 anni con sindrome di Down, prima dell'avvio del nuovo programma.

Nella figura 5 mostriamo un esempio di esercizio di nutrizione fatto in classe: si tratta della compilazione della tabella nutrizionale del piatto «Pomodori alla provenzale» nel quale la ragazza doveva calcolare, in base alla ricetta, le quantità di proteine, lipidi, glucidi e calorie e verificare infine se il piatto era equilibrato, confrontando le percentuali di proteine, lipidi e glucidi con quelle ideali che una pietanza dovrebbe avere secondo il LARN (livelli di assunzione di nutrienti raccomandati per la popolazione italiana).

Si osservi che in un primo momento, in base alle percentuali di proteine, lipidi (grassi), glucidi (zuccheri) e fibra indicate per ciascun ingrediente nelle tabelle nutrizionali, Francesca calcolava, moltiplicando (con la calcolatrice) la percentuale per il peso dell'ingrediente, le quantità dei nutrienti citati in ciascun ingrediente. In un secondo momento, per calcolare quale percentuale di calorie proveniva da proteine, da lipidi o da glucidi, impostava delle equazioni di primo grado in cui l'incognita era la percentuale (in base alla solita formula) e riportava i risultati su un grafico a istogrammi che confrontava con quello (LARN) di riferimento. Nel disegno del grafico non viene rispettata la giusta dimensione dell'istogramma più alto per «non andare sulla scrittura», come Francesca ha spiegato all'insegnante.



(continua)

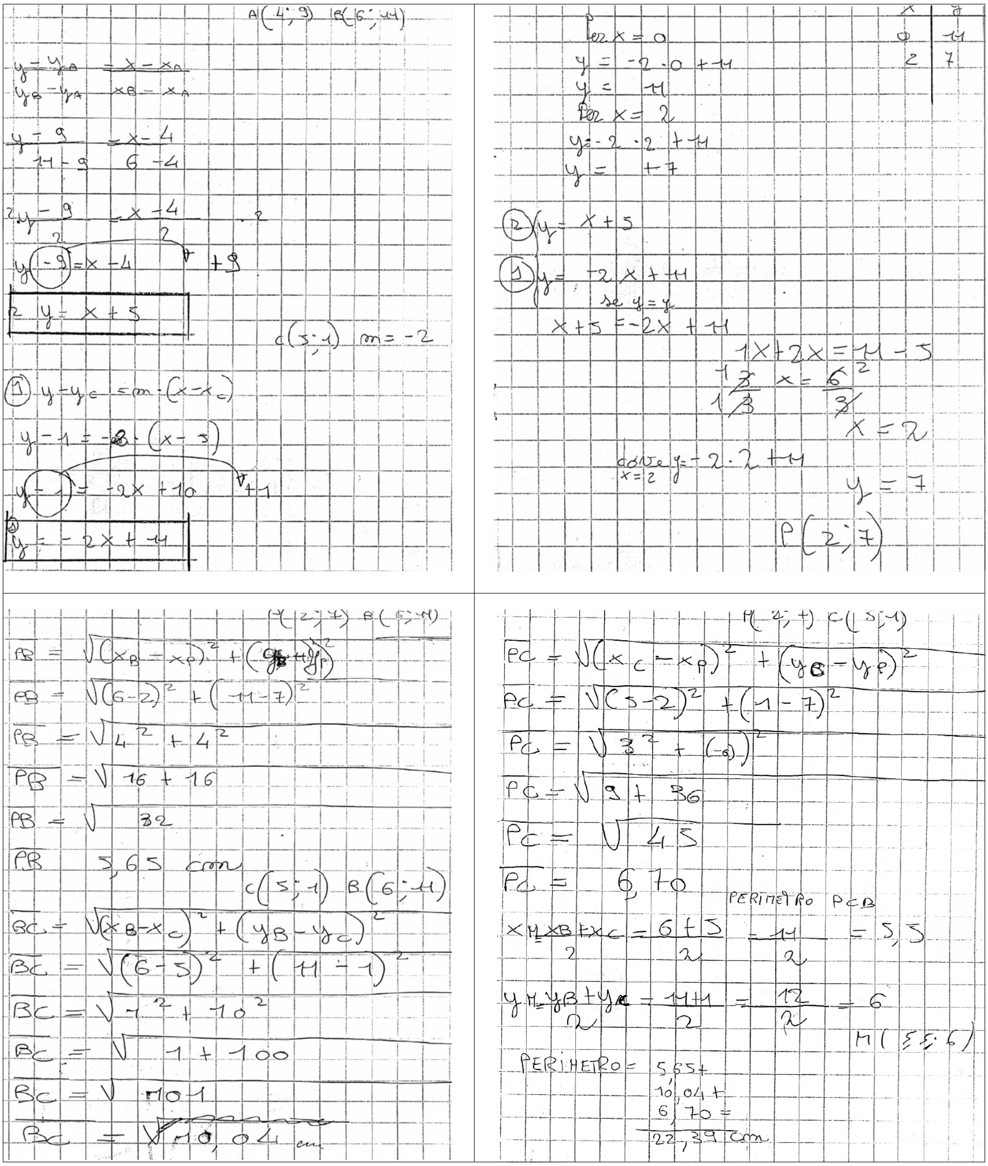


Nota: Nei «dati per una persona», sotto le voci proteine, lipidi e glucidi sono indicate le kilocalorie che ciascuna persona ottiene da tali nutrimenti. Considerando che 1 grammo di proteine dà 4 kcal, 1 grammo di grassi dà 9 kcal e 1 grammo di zucchero dà 3,75 kcal, si ottengono i valori calcolati.
Nel grafico a istogrammi le lettere G (glucidi) e L (lipidi) sono invertite.

Fig. 5 Compito di scienze degli alimenti svolto da Francesca.

Successivamente Francesca ha iniziato lo studio della geometria analitica; a questo riguardo presentiamo nella figura 6 un esercizio che ha svolto senza alcun aiuto in una verifica in classe.

La soluzione così precisa di questo esercizio svolto in classe fa pensare che Francesca abbia ben assimilato il programma e che la geometria analitica le sia davvero



A(4;9) B(6;11)

$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}$

$\frac{y-9}{11-9} = \frac{x-4}{6-4}$

$2 \cdot \frac{y-9}{2} = \frac{x-4}{2} \cdot 2$

$y - 9 = x - 4 \; +9$

$\boxed{2 \quad y = x + 5}$

C(5;1) m = -2

1 $y - y_C = m \cdot (x - x_C)$

$y - 1 = -2 \cdot (x - 5)$

$y - 1 = -2x + 10 \; +1$

$\boxed{1 \quad y = -2x + 11}$

per x = 0

$y = -2 \cdot 0 + 11$

$y = 11$

per x = 2

$y = -2 \cdot 2 + 11$

$y = +7$

x	y
0	11
2	7

2 $y = x + 5$

1 $y = -2x + 11$

se y = y

$x + 5 = -2x + 11$

$1x + 2x = 11 - 5$

$\frac{3}{3}x = \frac{6}{3}$

$x = 2$

dove x = 2 $y = -2 \cdot 2 + 11$

$y = 7$

P(2;7)

P(2;7) B(6;11)

$PB = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2}$

$PB = \sqrt{(6-2)^2 + (11-7)^2}$

$PB = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$PB = \sqrt{16 + 16}$

$PB = \sqrt{32}$

PB 5,65 cm

C(5;1) B(6;11)

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$

$BC = \sqrt{(6-5)^2 + (11-1)^2}$

$BC = \sqrt{1^2 + 10^2}$

$BC = \sqrt{1 + 100}$

$BC = \sqrt{101}$

BC = 10,04 cm

P(2;7) C(5;1)

$PC = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2}$

$PC = \sqrt{(5-2)^2 + (1-7)^2}$

$PC = \sqrt{3^2 + (-6)^2}$

$PC = \sqrt{9 + 36}$

$PC = \sqrt{45}$

PC = 6,70

PERIMETRO PCB

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$

$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$

M(5,5;6)

PERIMETRO = 5,65 + 10,04 + 6,70 = 22,39 cm

(continua)

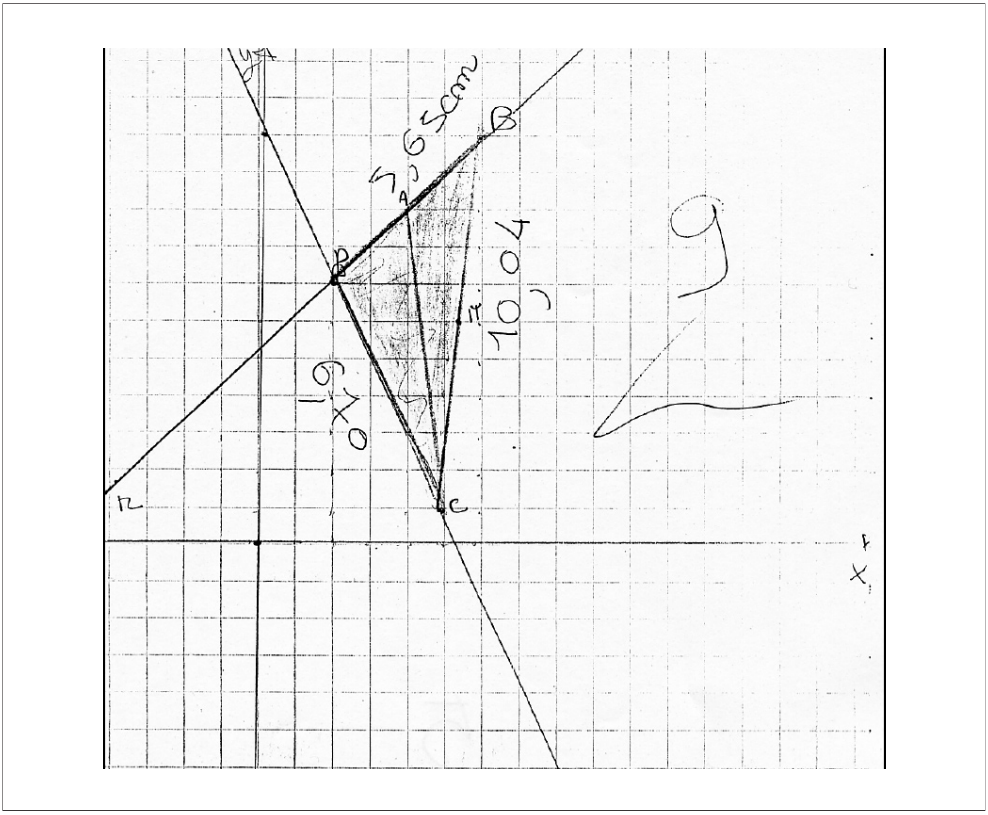


Fig. 6 Esercizio di geometria analitica svolto autonomamente in classe da Francesca.

congeniale: infatti le soluzioni algebriche e quelle grafiche si confermano reciprocamente e inoltre la parte grafica offre un importante supporto a quella algebrica.

A questo punto possiamo domandarci: se Francesca è così brava, che differenze ci sono fra lei e i suoi compagni?

- lei è un po' più lenta, ma spesso è più precisa e più costante;
- lei può anche perdersi «in un bicchier d'acqua» se le si chiede quant'è «a – 0», ma poi si riprende ragionandoci. Pertanto, se c'è un repentino cambio di contesto, può avere difficoltà anche con argomenti molto semplici; questo è uno dei motivi per cui le persone con sindrome di Down sono spesso sottovalutate e forse è il motivo per cui in precedenza le venivano proposti solo problemi del tipo «Nel paese di Rivazzurra...»;
- lei sa di avere maggiori difficoltà, per cui è attenta a verificare sempre i risultati e scrive in matita, invece che in penna, quando non si sente sicura, dimostrando una buona capacità di automonitoraggio.

Analisi dei risultati e conclusioni

Implicazioni sul piano didattico-pedagogico

Queste prime due esperienze hanno motivato ad allargare la ricerca a circa 25 studenti con sindrome di Down. In tutti i casi i risultati sono stati apprezzabili, ma hanno avuto continuità solo se svolti in un contesto di integrazione scolastica. In qualche caso la sperimentazione ha stimolato la scuola a modificare i programmi e a proseguirla in maniera autonoma.

Queste esperienze mostrano come il cambiamento di metodo per la soluzione dei problemi — da quello tradizionale a quello più scientifico, apparentemente più difficile, ma più «logico» per ragazzi con sindrome di Down — sia stato efficace.

L'esperienza di Francesca con la geometria analitica conferma la particolare abilità sul piano cartesiano, già rilevato nello studio di Gherardini e Nocera, e offre lo spunto per ulteriori sviluppi, che si stanno osservando anche con altri ragazzi.

Implicazioni sul piano cognitivo e psicologico

L'introduzione del nuovo approccio ha avuto i seguenti effetti su Edoardo e Francesca:

- i due studenti hanno imparato a ragionare in termini matematici e ciò ha permesso loro di affrontare con meno difficoltà i successivi argomenti di matematica, come è stato rilevato anche dagli insegnanti di classe;
- li ha motivati e appassionati alla matematica e li ha resi più sicuri anche nel calcolo mentale;
- ha fatto scoprire loro l'efficacia delle formule matematiche e delle equazioni per la risoluzione di problemi;
- li ha sollecitati verso il processo di generalizzazione, estendendo l'uso delle formule e delle equazioni ad altri tipi di problemi, anche tratti dal contesto quotidiano;
- ha permesso di avvicinare il programma individualizzato a quello della classe, facendo sentire i ragazzi disabili al pari degli altri e facendoli interagire con l'insegnante di classe e con i compagni;
- ha dato più dignità ai ragazzi disabili nell'esperienza di integrazione scolastica, rendendola più autentica e coinvolgente per tutti;
- ha migliorato negli alunni l'autostima e fiducia nelle proprie capacità cognitive.

Altre possibili implicazioni in campo cognitivo per la sindrome di Down

Queste esperienze sembrano confermare l'ipotesi, già espressa in altra sede,[19] che nella sindrome di Down, benché possano essere compromesse alcune abilità numeriche, siano invece relativamente ben sviluppate le abilità logiche, utili nell'algebra, nella geometria analitica e nella soluzione di problemi.

In conclusione, questi risultati ci invitano a prendere con prudenza le affermazioni di chi sostiene che gli studenti come Edoardo e Francesca, avendo la sindrome di Down, non possono capire concetti astratti e hanno solo bisogno di concretezza. E viene da chiedersi: è una loro reale esigenza o è una nostra libera interpretazione per semplificare una realtà che ci sfugge?

Bibliografia

1 Gherardini P. e Nocera S. (1999), *L'integrazione scolastica delle persone Down,* Trento, Erickson.

2 Monari Martinez E. (1998), *Teenagers with Down syndrome study algebra in high school,* «Down's Syndrome Research and Practice», vol. 5, n. 1, pp. 34-38.

3 Marcell M.M. e Weeks S.L. (1988), *Short-term memory difficults in Down's syndrome,* «Journal of Mental Deficiency Research», vol. 32, pp. 153-162.

4 Carlesimo G.A., Marotta L. e Vicari S. (1997), *Long-term memory in mental retardation: Evidence for a specific impairment in subjects with Down's syndrome,* «Neuropsychology», vol. 35, pp. 71-97.

5 Nadel L. (1999), *Learning and memory in Down's syndrome.* In J. Rondal, J. Perera e L. Nadel (a cura di), *Down syndrome: A review of current knowledge,* London, Whurr.

6 Chapman R.S. e Hesketh L.J. (2001), *Language, cognition, and short-term memory in individuals with Down syndrome,* «Down's Syndrome Research and Practice», vol. 7, n. 1.

7 Miller J.F., Leddy M., Miolo G. e Sedey A. (1995), *The development of early language skills in children with Down syndrome*. In L. Nadel e D. Rosenthal (a cura di), *Down syndrome: Living and learning in the community,* New York, Wiley-Liss.

8 Nadel L. (1999), *op. cit.*

9 Nadel L. (1999), *op. cit.*

10 Kay-Raining Bird E. e Chamman R. (1994) *Sequential recall in individuals with Down's syndrome,* «Journal of Speech and Hearing Research», vol. 37, pp. 1369-1380.

11 Chapman R.S. e Hesketh L.J. (2001), *op. cit.*

12 Monari Martinez E. (2002), *Learning mathematics at school… and later on.* «Down's Syndrome News and Update», vol. 2, n. 1, pp. 19-33.

13 Danesi S. (2000), *Le competenze logico-matematiche nella sindrome di Down: Uno studio esplorativo,* tesi non pubblicata, Facoltà di Psicologia, Università di Padova.

14 Johnson Laird P. (2003), *Seminario CISC,* Facoltà di Psicologia, Università di Padova.

15 Monari Martinez E. (2002), *op. cit.*

16 Baccarin M.E. (2002), *L'integrazione scolastica di un adolescente con sindrome di Down, quanto il programma individualizzato può avvicinarsi a quello della classe?,* tesi non pubblicata, corso di laurea in Scienze dell'Educazione, Università di Padova.

17 Corazza N. (2003), *L'uso di equazioni per la soluzione di problemi nella scuola elementare: uno studio nelle classi 2° e 4°,* tesi non pubblicata, corso di laurea in Scienze dell'Educazione, Università di Padova.

18 Monari Martinez E. (2002), *op. cit.*

[19] Benedetti N. (2001), *Le abilità matematiche di una ragazza con sindrome di Down*, tesi non pubblicata, Corso per Insegnanti di sostegno, Università di Venezia.

[20] Monari Martinez E. (2002), *op. cit.*

Danesi S. (2000), *op. cit.*

SULLO STESSO TEMA

Mercer C.D. et al. (1995), *L'insegnamento della matematica secondo l'approccio costruttivista,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 1, n. 2.

Miles D.D. e Forcht J.P. (1996), *Strategie di «attacco cognitivo» per le difficoltà in matematica nella scuola superiore,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 1, n. 4.

Parmar R.S. et al. (1997), *Matematica e risoluzione di problemi verbali: le origini delle difficoltà,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 2, n. 3.

Tellarini M. e Lucangeli D. (1998), *Gli atteggiamenti metacognitivi e le capacità di soluzione dei problemi in matematica,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 3, n. 3.

Bendotti M. et al. (1998), *Errori lessicali, semantici e sintattici nel pensiero matematico dei bambini,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 3, n. 4.

Longo P. (1998), *Uso di rappresentazioni grafiche per facilitare l'astrazione e la simbolizzazione in matematica,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 4, n. 1.

Carnine D. (1999), *Cinque regole per insegnare il problem solving matematico ad alunni con difficoltà di apprendimento*, «Difficoltà di Apprendimento», vol. 4, n. 3.

Jones E.D. et al. (1999), *L'insegnamento della matematica a studenti della scuola media con difficoltà di apprendimento*, «Difficoltà di Apprendimento», vol. 5, n. 1.

Riccardi Ripamonti I. (2000), *Soluzione di problemi: itinerari cognitivi e metacognitivi per la prevenzione delle difficoltà matematiche*, «Difficoltà di Apprendimento», vol. 6, n. 1.

Karp K.S. e Voltz D.L. (2000), *Matematica e alunni con difficoltà: strategie per l'insegnante curricolare (e di sostegno),* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 6, n. 2.

Allsopp D.H. (2001), *L'uso di materiali di manipolazione, dimostrazioni e strategie di memorizzazione nella matematica di scuola media*, «Difficoltà di Apprendimento», vol. 6, n. 3.

Gallagher Landi M.A. (2001), *Strategie di comprensione del testo dei problemi in matematica*, «Difficoltà di Apprendimento», vol. 7, n. 2.

Gagnon J.C. e Maccini P. (2002), *Studenti con difficoltà di apprendimento e strategie di avvicinamento all'algebra,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 7, n. 3.

Jitendra A.K. et al. (2002), *L'uso degli schemi visivi per la risoluzione dei problemi matematici,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 8, n. 1.

Furner J.M. e Lou Duffy M. (2003), *Prevenire e ridurre l'ansia per la matematica,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 8, n. 3.

Cawley J.F. e Foley T.E. (2003), *Insegnare la matematica e le scienze con le unità applicative integrate,* «Difficoltà di Apprendimento», vol. 9, n. 2.